2016

Examen corrigé
Échantillonnage & Estimation

2013-2014 | EG3

Professeur : M.

Corrigé disponible sur www.mafacdeco.com et www.koulyati.com
Issam EZZAHRAOUI
23/11/2016

CONTRÔLE FINAL 2014

(1)

EXO I :)

I) - Déterminer la constante K, telle que :

$$P(\chi^2_{41} \geq K) = 0,95$$

* propriétés :

$P(\chi^2_n \geq K) = P$ (quand $n \longrightarrow \infty$) ⚠

$$\sqrt{2\chi^2_n} - \sqrt{2n-1} \sim N(0,1)$$

donc : $P(\chi^2_{41} \geq K) = 0,95$

$\Rightarrow P(\sqrt{2\chi^2_{41}} \geq \sqrt{2K}) = 0,95$

$\Rightarrow P(\sqrt{2\chi^2_{41}} - \sqrt{2n-1} \geq \sqrt{2K} - \sqrt{81}) = 0,95$

(car $n = 41$) ⚠ ($2n-1 = 81$)

donc :

$\Rightarrow P(N(0,1) \geq X) = 0,95$ (on pose : $X = \sqrt{2K} - \sqrt{81}$) ⚠

$\Rightarrow P(N(0,1) < X) = 0,05$ ($P(X \geq t) = 1 - P(X < t)$) ⚠

~~donc~~ Après la table de la loi Normale C.R on trouve : $X = -1,65$

$\boxed{\text{car : } P(N(0,1) < x) = 0,95 \quad x = 1,65}$

donc : $\sqrt{2K} - \sqrt{81} = -1,65$

$$K = 27,01$$

Exo II : ②

Démontrez la propriété suivante : $\cdot M_x^{(n)}(t) = E(X^n)$

on a : $M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} F(x)\, dx$

L'opération Fonctionnelle associant à une Fonction $(x \to F(x))$ la Fonc $(t \longrightarrow M(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} F(t)\, dt$ s'appelle la transformation de laplace (bilatère). par la Formule de Taylor nous savons que le coefficient de t^n dans la serie entière de M_x n'est autre que la valeur de $\frac{M_x^n(0)}{n!}$ donc : $\mu_x(n) = M^{(n)}(t)$ d'ou

$$M_x^n(t) = E(X^n)$$. avec $t = 0$ (Voir page : 20-21)

Exo III :

a) Estimation ponctuelle de proportion : (P)

on estime P par la Fréquence :

donc : $f = \frac{m}{N} = \frac{145}{500} = 0,29$

b) on a : $n = 500 > 30$ $\alpha = 90\%$

donc : $P \sim N\left(f ; \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$

$$IC = \left[f - t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

on cherche t_α : on a $2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,9$

$\Rightarrow 2\Pi(t_\alpha) = 1,9 \Rightarrow \Pi(t_\alpha) = 0,95$ Après Table de la loi Normale : $t_\alpha = 1,65$. donc :

$$IC = \left[0,29 - 1,65 \times \sqrt{\frac{0,29 \times 0,71}{500}} ; 0,29 + 1,65 \times \sqrt{\frac{0,29 \times 0,71}{500}}\right]$$

$$IC = [0,2565 , 0,3234]$$

b) $\alpha = 95\%$ (suite) ③

$$IC = \left[f - t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

On cherche t_α : on a $2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,95$

$\Rightarrow \Pi(t_\alpha) = \frac{1,95}{2} \Rightarrow \Pi(t_\alpha) = 0,975$; Après T. de la loi N

$t_\alpha = 1,96$ donc :

$$IC = \left[0,29 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,29 \times 0,71}{500}} \; ; \; 0,29 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,29 \times 0,71}{500}} \right]$$

$$IC = [0,2502 \; ; \; 0,3297]$$

Commentaire : on constate que l'intervalle obtenu avec $\alpha = 0,95$ est plus grand, il suffirait de remplacer $t_\alpha = 1,65$ par $t_\alpha = 1,96$ pour obtiendrait un intervalle plus grand.

EX° IV :

a) l'estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart type

- on estime la moyenne m par la moyenne observée :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{1502}{150} = 10,01$$

- l'estimation ponctuelle de σ :

$$S^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\Sigma X_i^2 - \Sigma \bar{X}^2}{n-1} = \frac{19486 - (150 \times (10,01)^2)}{149}$$

$S^2 = 29,90 \Rightarrow S = 5,47$

b) on a : $n = 150 > 30$ donc $\bar{X}$ suit approximativement une loi Normale. donc : (4)

$$IC = \left[\bar{x} - t_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right] ; \text{ avec : } \alpha = 0{,}99$$

on cherche : t_α. on a $2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0{,}99$

donc $\Pi(t_\alpha) = 0{,}995$, Après la T de la loi Normale on trouve

$t_\alpha = 2{,}57$

$$IC = \left[10{,}01 - 2{,}57 \times \frac{5{,}47}{\sqrt{150}} ; 10{,}01 + 2{,}57 \times \frac{5{,}47}{\sqrt{150}}\right]$$

$$IC = [8{,}86 ; 11{,}16]$$

c) La marge d'erreur est la demi-longueur de l'intervalle obtenu à la question (b), elle vaut donc

$$1{,}15 = t_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Exo V : Tester l'hypothèse H_0 contre H_1 avec $\alpha = 0{,}05$

puisque : X suit une loi normale (gaussienne) et σ inconnu et $n < 30$ donc la V.a. de décision

$T = \dfrac{\bar{X} - m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ suit une loi du student $(n-1)$ d.d.l

puisque $H_1 : m > m_0$ alors il s'agit d'un test unilatéral à gauche

avec : $S^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$S^2 = \dfrac{45}{15} = 3$

$S = 1{,}73$

$I_{acc} = \left]-\infty ; m_0 + t_{1-\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$t_{1-\alpha} = 1{,}753$ (table de Student)

donc : $I_{acc} = \left]-\infty ; 7 + 1{,}753 \times \frac{1{,}73}{\sqrt{16}}\right]$

$I_{acc} =]-\infty ; 7{,}76]$

puisque $\bar{x} = 8 \notin]-\infty ; 7{,}76]$

donc on refuse H_0 et on accepte H_1

Bonne courage

ISSAM

2016